數學傳播　49卷4期, pp. 139-146

談談西摩松定理及其推廣的極座標證明

于志洪

摘要: 本人是中學高級教師退休, 是江蘇省優秀教育工作者, 已退休 17 年。近日有興趣翻閱有關西摩松定理的專刊及專著, 發現: ①《中學數學教學》(上海師範大學主辦) 1984 年第 6 期和上海科委主辦的《中學科技》1985 年第 5 期都刊登和轉載了合肥九中程李強的《Simson 線的推廣》一文; ② 1986 年 3 月, [日] 矢野健太郎, 著《幾何的有名定理》, 由上海科學技術出版社出版, 在第七章中也介紹了西摩松定理的複數證法; ③ 1988 年 11 月, 汪江松和黃家禮編著的《幾何明珠》由中國地質大學出版社出版, 書中第 190 至 196 頁也介紹了西摩松定理及其推廣的幾何證法研究。然而上述論文及論著的幾何證法及複數證法都比較繁瑣, 不夠簡明。但閱讀上述資料後, 頗受啓發, 收益匪淺。根據國家教育部高中數學新課程標準把《座標系與參數方程列入選修系列 4, 因而極座標内容的應用就顯得十分重要。爲說明極座標在解題中的應用, 本文現應用極座標法對西摩松定理及其推廣進行簡捷新穎的證明, 既彌補上本述論文和論著的不足, 又可供高中數學教師參考, 達到數學傳播之功效。

關鍵字: 極座標、西摩松、推廣。

一、垂足多邊形

由多邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 所在平面上的一點 P, 向多邊形的各邊 $A_1A_2, A_2A_3, \ldots A_nA_1$ 作垂線, 其垂足爲 B_1、B_2、…、B_n , 那麼多邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 叫做 P 點關於多邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的一階垂足多邊形 (或簡稱垂足多邊形)。

由 P 點再作 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 各邊的垂線, 設垂足爲 C_1、C_2、…、C_n, 那麼多邊形 $C_1C_2C_3\cdot C_n$ 叫做 P 點關於多邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的二階垂足多邊形。由 P 點再作出 $C_1C_2C_3\cdot C_n$ 的垂足多邊形, 稱爲 P 點關於多邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的三階垂足多邊形, $\cdots$ 依此類推, 可定義 P點關於多邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的 n 階垂足多邊形。

下面就用極座標法來證明西摩松定理其推廣。

二、西摩松 (Simson) 定理的證明

設 P 爲 $\triangle A_1A_2A_3$ 外接圓上任一點, 那麼 P 點關於 $\triangle A_1A_2A_3$ 的一階垂足三角形的三個頂點在一條直線上。

證明: 如圖 1, 以 P 爲極點, PO 所在的半射線爲極軸建立極座標系。設 $\triangle A_1A_2A_3$ 的外接圓直徑爲 d, 則 $\odot O$ 的方程爲 $\rho = d\cos\theta$, 設頂點爲 $A_i(d\cos\theta_i, \theta_i)$, $(i=1,2,3)$, $\theta\in[0,2\pi]$ 所以 A_1A_2 的兩點式方程爲: $\dfrac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\rho}=\dfrac{\sin(\theta_2-\theta)}{d\cos\theta_1}=\dfrac{\sin(\theta-\theta_1)}{d\cos\theta_2}$

$$\therefore \rho[\sin(\theta_2-\theta)\cos\theta_2+\sin(\theta-\theta_1)\cos\theta_1]=d\sin(\theta_2-\theta_1)\cos\theta_1\cos\theta_2,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}\rho[\sin(2\theta_2-\theta)+\sin(\theta-2\theta_1)]=d\sin(\theta_2-\theta_1)\cos\theta_1\cos\theta_2,$$

因爲 $\sin(\theta-2\theta_1)\neq 0$, $\therefore\ \rho\cos(\theta-\theta_1-\theta_2)=d\cos\theta_1\cos\theta_2$。

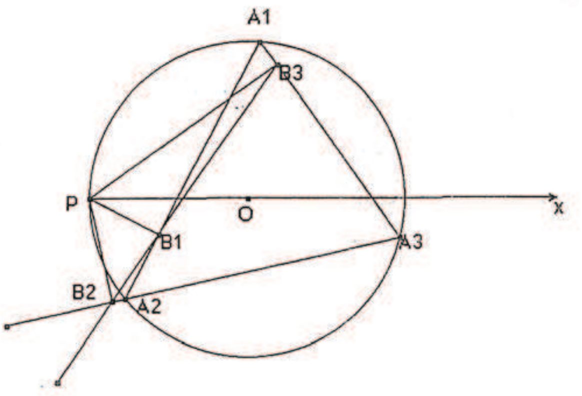

圖1

這是 A_1A_2 的法線式方程, 故知垂足 B_1 的座標爲 $(d\cos\theta_1\cos\theta_2, \theta_1+\theta_2)$。輪換三個頂點的座標, 得 $B_2(d\cos\theta_2\cos\theta_3, \theta_2+\theta_3)$, $B_3(d\cos\theta_3\cos\theta_1, \theta_3+\theta_1)$。顯然 B_1、B_2、B_3 的座標都滿足法線式方程: $\rho\cos(\theta-\theta_1-\theta_2-\theta_3)=d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3$。故 B_1、B_2、B_3 三點共線。

三、西摩松定理推廣的證明

1、設 P 點與四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的四個頂點同在一個圓周上。那麼 P 點關於四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的二階垂足四邊形的四個頂點在一條直線上。

證明: 如圖 2, 以 P 爲極點, PO 所在的半射線爲極軸建立極座標系。設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$

的外接圓直徑爲 d, 則 $\odot O$ 的方程爲 $\rho = d\cos\theta$, 設頂點爲 $A_i(d\cos\theta_i, \theta_i)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, 所以由 Simson 定理的證明知 A_2A_3 的方程爲:

$$\rho\cos(\theta - \theta_2 - \theta_3) = d\cos\theta_2\cos\theta_3, \quad \therefore\ B_2(d\cos\theta_2\cos\theta_3, \theta_2 + \theta_3).$$

輪換四個頂點的座標, 得

$$B_3(d\cos\theta_3\cos\theta_4, \theta_3 + \theta_4),\ B_4(d\cos\theta_1\cos\theta_4, \theta_1 + \theta_4),\ B_1(d\cos\theta_2\cos\theta_1, \theta_2 + \theta_1)$$

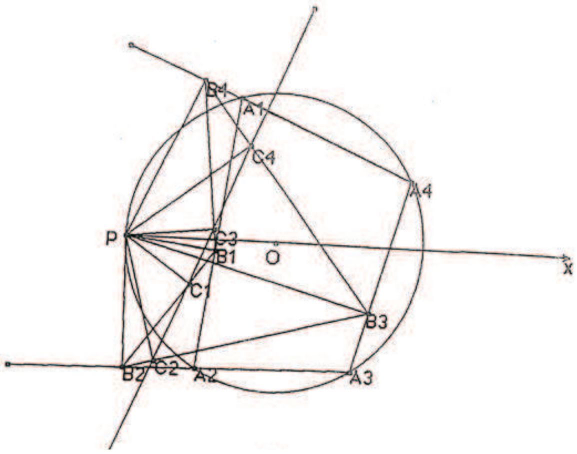

圖 2

故 B_2B_3 的兩點式方程爲:

$$\frac{\sin(\theta_3 + \theta_4 - \theta_2 - \theta_3)}{\rho} = \frac{\sin(\theta_3 + \theta_4 - \theta)}{d\cos\theta_2\cos\theta_2} + \frac{\sin(\theta - \theta_2 - \theta_3)}{d\cos\theta_3\cos\theta_4},$$

$$\therefore\ \frac{\sin(\theta_4 - \theta_2)}{\rho} = \frac{\sin(\theta_2 + \theta_4 - \theta)\cos\theta_4 + \sin(\theta - \theta_2 - \theta_3)\cos\theta_2}{d\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4}$$

$$\sin(\theta_3 + \theta_4 - \theta)\cos\theta_4 + \sin(\theta - \theta_2 - \theta_3)\cos\theta_2$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(\theta_3 + 2\theta_4 - \theta) + \sin(\theta - 2\theta_2 - \theta_3)] = \sin(\theta_4 - \theta_2)\cos(\theta - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4)$$

$$\therefore\ \frac{\sin(\theta_4 - \theta_2)}{\rho} = \frac{\sin(\theta_4 - \theta_2)\cos(\theta - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4)}{d\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4}\sin(\theta_4 - \theta_2) \neq 0.$$

$$\therefore\ \rho\cos(\theta - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4) = d\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4.$$

這是 B_2B_3 的法線式方程, 故知垂足 C_2 的爲座標 $(d\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4, \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$, 輪換 B_1、B_2、B_3、B_4 四個點的座標, 得 $C_3(d\cos\theta_3\cos\theta_4\cos\theta_1, \theta_3 + \theta_4 + \theta_1)$, $C_4(d\cos\theta_4\cos\theta_1\cos\theta_2, \theta_4 + \theta_1 + \theta_2)$, $C_1(d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3, \theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$, 顯然 C_1、C_2、C_3、C_4 的座標都滿足法線式方程: 故 C_1、C_2、C_3、C_4 四點共線。

2、設 P 點與五邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的五個頂點同在一個圓周上, 那麼 P 點關於五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 的三階垂足五邊形的五個頂點在一條直線上。

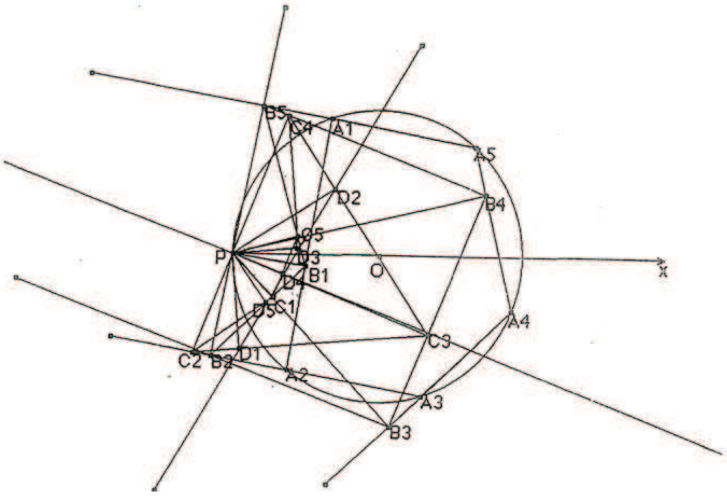

圖3

證明: 如圖 3 建立極座標系。仿照上述證明, 先求 B_1、B_2、B_3、B_4、B_5 的座標, 再求 C_1、C_2、C_3、C_4、C_5 的座標, 最後求 D_1、D_2、D_3、D_4、D_5 的座標爲:

$$\begin{aligned}
&D_1(d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4, \theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4),\\
&D_2(d\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4\cos\theta_5, \theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5),\\
&D_3(d\cos\theta_3\cos\theta_4\cos\theta_5\cos\theta_1, \theta_3+\theta_4+\theta_5+\theta_1),\\
&D_4(d\cos\theta_4\cos\theta_5\cos\theta_1\cos\theta_2, \theta_4+\theta_5+\theta_1+\theta_2),\\
&D_5(d\cos\theta_5\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3, \theta_5+\theta_1+\theta_2+\theta_3),
\end{aligned}$$

顯然 D_1、D_2、D_3、D_4、D_5 的座標滿足法線式方程:

$$\rho\cos\Big(\theta-\sum_{i=1}^{5}\theta_i\Big)=d\prod_{i=1}^{5}\cos\theta_i$$

故 D_1、D_2、D_3、D_4、D_5 五點共線。

3、設 P 點與 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的所有頂點同在一個圓周上。那麼 P 點關於 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的 $(n-2)$ 階垂足 n 邊形的 n 個頂點都在一條直線上。

證明: 極座標的建立與上相仿, 按照上述證明易知, P 點關於 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的 $(n-2)$ 階垂足 n 邊形的 n 個頂點的座標都滿足法線式方程:

故 P點關於 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的 $(n-2)$ 階垂足 n 邊形的 n 個頂點都在一條直線上。

$$\rho\cos\left(\theta-\sum_{i=1}^{n}\theta_i\right)=d\prod_{i=1}^{n}\cos\theta_i$$

從而得出: 圓內接 n 邊形 $(n\geq 3)$ 的 $(n-2)$ 階垂足共線。

綜上所述可見: 應用極座標法證明上述西摩松定理及其推廣, 其關鍵在於巧妙正確建立極座標系, 並根據題設, 以最少量的字母表示未知的幾何量, 借其幾何性質, 設置圖形中有關各點的座標, 寫出極座標有關的方程, 將幾何圖形數量化, 再結合代數、三角知識, 通過運算, 即可獲證。此法思路簡捷, 證題明快, 一般不添或少添輔助線, 因此是證題的一種好方法, 值得重視。

教學實踐證明: 引導學生學習高中選修內容, 並對其應用進行研究, 符合新課程改革關於"以課程標準爲指導, 以教材爲基礎, 合理使用課本, 加強教學科研"的理念要求, 有利於幫助學生全面理解高中平面解析幾何的知識, 有利於培養學生的探索精神和創新意識, 有利於指導學生感悟數學、掌握基礎知識和基本技能及方法, 利於學生啟迪思維、開拓視野, 提高綜合解題水準。

總之, 我們要注重這一新內容的研究, 要引導學生通過專題講座的探究, 使學生更加熱愛數學, 對數學產生濃厚的興趣。

附録: 極座標法證西摩松定理

西摩松 (Simson) 定理的證明衆所周知: "三角形外接圓上任一點在三邊所在直線上的射影共線。這直線叫做該點對於該三角形的西摩松 (Simson) 線。西摩松線的證明方法較多, 唯獨極座標法別樹一幟, 現介紹如下:

如圖 4, 以 P 爲極點, 射線 PO 爲極軸建立極座標系, 設 $\triangle A_1A_2A_3$ 的外接圓直徑爲 1, 則圓 O 的方程爲 $\rho=\cos\theta$。

令 $A_1(\cos\theta_1,\theta_1)$, $A_2(\cos\theta_2,\theta_2)$, $A_3(\cos\theta_3,\theta_3)$, 則 A_2A_3 的兩點式直線方程爲:

$$\frac{\sin\theta_3-\theta_2)}{\rho}=\frac{\sin(\theta_3-\theta)}{\cos\theta_2}+\frac{\sin(\theta-\theta_2)}{\cos\theta_3}$$

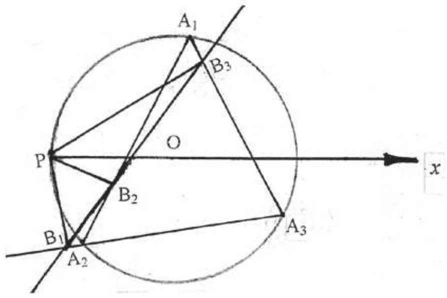

圖 4

化簡整理, 得 $\rho\cos(\theta-\theta_2-\theta_3)=\cos\theta_2\cos\theta_3$

這恰好是 A_2A_3 的法線式方程, 故垂足 B_1 的座標爲 $(\cos\theta_2\cos\theta_3,\theta_2+\theta_3)$, 輪換三個頂點的座標得 B_2 的座標爲 $(\cos\theta_3\cos\theta_1,\theta_3+\theta_1)$, B_3 的座標爲 $(\cos\theta_1\cos\theta_2,\theta_1+\theta_2)$。

證一: 點的座標滿足法線式方程法 將 B_1 點的座標代入方程 $\rho\cos(\theta-\theta_1-\theta_2-\theta_3)=\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3$ (1) 中, 得

$$左=\cos\theta_2\cos\theta_3\cos(\theta_2+\theta_3-\theta_1-\theta_2-\theta_3)=\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3=右。$$

$\therefore B_1$ 點的座標滿足方程 (1) , 同理 B_2, B_3點的座標也滿足方程 (1) , 故 B_1、B_2、B_3 三點共線。

證二: 點的座標滿足兩點式方程法 $\because B_1, B_2$ 的兩點式直線方程爲:

$$\frac{\sin\theta_3+\theta_1-\theta_2-\theta_3)}{\rho}=\frac{\sin(\theta_3+\theta_1-\theta)}{\cos\theta_2\cos\theta_3}+\frac{\sin(\theta-\theta_2-\theta_3)}{\cos\theta_3\cos\theta_1}$$

即

$$\frac{\sin\theta_1-\theta_2)}{\rho}=\frac{\sin(\theta_3+\theta_1-\theta)}{\cos\theta_2\cos\theta_3}+\frac{\sin(\theta-\theta_2-\theta_3)}{\cos\theta_3\cos\theta_1}$$

把 B_3 點的座標代入上式方程中, 得

$$\begin{aligned}右=&\frac{\sin(\theta_3+\theta_1-\theta_1-\theta_2)}{\cos\theta_2\cos\theta_3}+\frac{\sin(\theta_1+\theta_2-\theta_2-\theta_3)}{\cos\theta_3\cos\theta_1}\\=&\frac{\sin(\theta_3-\theta_2)\cos\theta_1+\sin(\theta_1-\theta_3)\cos\theta_2}{\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3}=\frac{\cos\theta_3\sin(\theta_1-\theta_2)}{\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3}=\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\cos\theta_1\cos\theta_2}=左\end{aligned}$$

$\therefore B_1$、B_2、B_3 三點共線。

證三: 點線距離為零法 由證一知 B_2、B_3 所在的直線方程爲方程 (1), 而由點線距離公式得 B_1 點到直線 B_2B_3 的距離爲:

$$\begin{aligned}d=&\cos\theta_2\cos\theta_3\cos(\theta_2+\theta_3-\theta_1-\theta_2-\theta_3)-\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\\=&\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_1-\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3=0\end{aligned}$$

$\therefore B_1$、B_2、B_3 三點共線。

證四: 斜率相等法

$$\begin{aligned}K_{B_2B_3}=&\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2\cos(\theta_1+\theta_2)-\cos\theta_3\cos\theta_1\sin(\theta_3+\theta_1)}{\cos\theta_1\cos\theta_2\cos(\theta_1+\theta_2)-\cos\theta_3\cos\theta_1\cos(\theta_3+\theta_1)}\\=&\frac{\cos\theta_2\cos(\theta_1+\theta_2)-\cos\theta_3\sin(\theta_3+\theta_1)}{\cos\theta_2\cos(\theta_1+\theta_2)-\cos\theta_3\cos(\theta_3+\theta_1)}\\=&\frac{\sin(\theta_1+2\theta_2)-\sin(\theta_1+2\theta_3)}{\cos(\theta_1+2\theta_2)-\cos(\theta_1+2\theta_3)}\\=&\frac{2\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\sin(\theta_2-\theta_3)}{2\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\sin(\theta_3-\theta_2)}\end{aligned}$$

$$= -\cot(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$

又因三個垂足的座標具有輪換性, 所以 $K_{B_1B_2}=-\cot(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$, 從而 B_1、B_2、B_3 三點共線。

證五: 應用距離公式計算法

因爲

$$\begin{aligned}
B_1B_2 &= \sqrt{\cos^2\theta_2\cos^2\theta_3+\cos^2\theta_3\cos^2\theta_1-2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos^2\theta_3\cos(\theta_2-\theta_1)}\\
&= \sqrt{\cos^2\theta_3[\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_1-2\cos\theta_1\cos\theta_2(\cos\theta_2\cos\theta_1+\sin\theta_2\sin\theta_1)]}\\
&= \sqrt{\cos^2\theta_3(\cos^2\theta_2\sin^2\theta_1+\cos^2\theta_1\sin^2\theta_2-2\sin\theta_2\sin\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_1)}\\
&= \sqrt{\cos^2\theta_3(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)^2}=\pm\cos\theta_3\sin(\theta_1-\theta_2)
\end{aligned}$$

輪換 B_1、B_2、B_3 三點的座標, 得

$$B_2B_3=\pm\cos\theta_1\sin(\theta_2-\theta_3),\quad B_1B_3=\pm\cos\theta_2\sin(\theta_3-\theta_1)$$

$$\therefore B_1B_2+B_1B_3=\pm[\cos\theta_3\sin(\theta_1-\theta_2)+\cos\theta_1\sin(\theta_2-\theta_3)$$

$$=\pm(\cos\theta_3\cos\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_3\cos\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3-\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3)$$

$$=\pm\cos\theta_2(\sin\theta_1\cos\theta_3-\cos\theta_1\sin\theta_3)=\pm\cos\theta_2\sin(\theta_3-\theta_1)=B_1B_3$$

$\therefore$ B_1、B_2、B_3 三點共線。

證六: 應用三點共線充要條件法

$$\because\ D=\begin{vmatrix}\cos\theta_2\cos\theta_3\cos(\theta_2+\theta_3) & \cos\theta_2\cos\theta_3\sin(\theta_2+\theta_3) & 1\\ \cos\theta_3\cos\theta_1\cos(\theta_3+\theta_1) & \cos\theta_3\cos\theta_1\sin(\theta_3+\theta_1) & 1\\ \cos\theta_1\cos\theta_2\cos(\theta_1+\theta_2) & \cos\theta_1\cos\theta_2\sin(\theta_1+\theta_2) & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cdot[\sin(\theta_2-\theta_1+\theta_3)+\sin(\theta_3-\theta_1-\theta_2)+\sin(\theta_3-\theta_2+\theta_1)$$

$$+\sin(\theta_3-\theta_2-\theta_1)+\sin(\theta_1-\theta_3+\theta_2)+\sin(\theta_1-\theta_3-\theta_2)]$$

$$\because\ \sin(-x)=-\sin x\qquad\therefore\ D=\frac{1}{2}\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cdot 0=0$$

故 B_1、B_2、B_3 三點共線。

由此可見: 應用極座標法證三點線的問題時, 首先要適當建立極座標系, 再根據命題的條件, 結合圖形, 應用有關公式和方程求出三個點的極座標, 利用上述方法證明即可。

如果證明四點共線, 可先證任意三點共線, 再證另外一點的座標滿足共線的方程。

如要證明四個以上的點共線, 可先證明三點共線, 再證明共餘各點的座標滿足共線的方程。此法簡捷明瞭, 富有規律, 值得介紹。

總而言之, 應用極座標法研究著名的幾何定理, 既符合新課程標準的理念要求, 又利於學生鞏固 “雙基” 內容, 對於啟迪學生思維、開拓學生視野、提高綜合解題水準、融會貫通學科間的知識聯繫, 均頗有益處。

因此筆者認為: 加強這類專題的研究是很有必要的。

參考文獻

1. 于志洪。極座標法證朗古萊定理及其推廣, 美國太平洋數學雜誌, 加利福尼亞大學主辦, 1996:176 (2)
2. 于志洪。極座標法證三點共線。《數學教學》(上海) 華東師範大學主辦, 1984 (4)。
3. 程李強。西摩松線的推廣。《中學數學教學》(上海師範大學主辦), 1984 (6)。
4. (日) 矢野健太郎著, 陳永明譯。《幾何的有名定理》, 上海科技出版社, 1986, 75-77。
5. 于志洪。用極座標兩點間距離公式證明定值問題。數學通訊 (武漢) (華中師範大學主辦), 2009 (3)。
6. 于志洪。應用極座標圓的方程證明幾何定理。天津教育學院學報 (自科版), 1989 (1)。
7. 于志洪。圓的點弦 (切) 距公式及其應用。寧夏大學學報 (自科版), 1993 (4)。
8. 于志洪。應用極座標兩點式方程證明幾何定理。天津教育學院學報 (自科版), 1988 (1)。
9. 于志洪。極座標證明西摩松對稱線的推廣。《中學數學》(蘇州大學主辦), 1989 (6)。
10. 于志洪。極座標法證明四點共線。《樂山師專學報》(自然科學版), 1988 (1)。
11. 于志洪。應用極座標證幾何定理。《海南教育學院學報》(自科版), 1994 (1)。
12. 于志洪。極座標法證一定理及其推廣。《數學通報》(北京師範大學主辦), 1990 (2)。

—本文作者為中國江蘇省泰州中學附屬初級中學退休教師—

114學年度周鴻經獎學金錄取名單

(名單順序無關排名)

吳俊暉 (國立政治大學)	陳彥安 (國立政治大學)	陳亭蓁 (國立成功大學)
許景仲 (國立陽明交通大學)	陳柏瑄 (國立陽明交通大學)	蔡昱伶 (國立中央大學)
宋丞軒 (國立臺灣大學)	張嘉育 (國立臺灣大學)	秦　安 (國立臺灣大學)
張維璽 (國立清華大學)	陳松筠 (國立清華大學)	黃斐浚 (國立清華大學)